ECOLE NAVALE

Concours 1979

Calcul numérique

I

On considère la famille de polynômes entiers $y_n(x)$ de la variable réelle x, satisfaisant à la relation de récurrence

$$(R) \qquad y_n(x) + xy_{n-1}(x) + y_{n-2}(x) = 0 \quad , \quad n \geqslant 2,$$

avec

$$y_0(x) = 1, \quad y_1(x) = -x.$$

1. — La relation (R) permet de calculer de proche en proche les polynômes $y_n(x)$ pour $n \geqslant 2$. Former les polynômes $y_n(x)$ pour $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ et 8.

Etablir que $y_n(x)$ est un polynôme de degré n en x dont les termes sont de même parité ; donner l'expression du terme de plus haut degré de $y_n(x)$.

2. — On rappelle que l'ensemble des solutions de la relation (R) a une structure d'espace vectoriel sur le corps des complexes.

a) En cherchant de (R) des solutions de la forme

$$[r(x)]^n \quad , \quad n \in \mathrm{N};$$

montrer que pour x différent de ± 2, on a

$$y_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} \left[\left(\frac{-x + \sqrt{x^2-4}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{-x - \sqrt{x^2-4}}{2} \right)^{n+1} \right].$$

Vérifier que le membre de droite de cette relation représente bien un polynôme de degré n en x.

Déduire des résultats précédents la valeur de la somme

$$C^1_n + C^3_n + C^5_n + \ldots,$$

C^p_n étant le nombre des combinaisons de n objets pris p à p.

b) Partant des résultats du paragraphe précédent, calculer

$$y_n(+1) \quad \text{et} \quad y_n(-1).$$

c) On suppose maintenant $x = \pm 2$; en utilisant un procédé analogue à celui indiqué au paragraphe *a*), calculer

$$y_n(+2) \quad \text{et} \quad y_n(-2).$$

3. — On suppose $|x| < 2$ et l'on pose $x = -2\cos\theta$, montrer que

$$y_n(-2\cos\theta) = \frac{\sin(n+1)\,\theta}{\sin\theta},$$

et donner les valeurs des zéros du polynôme $y_n(x)$.

Calculer en particulier les zéros de $y_8(x)$ à 10^{-3} près.

.../...

4. — Montrer que pour $-2 < x < 2$

$$| y_n(x) | \leqslant n + 1$$

5. — Etablir, avec $| x | < 2$, les relations

$$y_{2n}(x) = y^2{}_n(x) - y^2{}_{n-1}(x)$$

$$y_{2n+1}(x) = y_n(x)\,[y_{n+1}(x) - y_{n-1}(x)]$$

et en déduire les valeurs des sommes

$$\sum_{k=0}^{n} y_{2k}(x) \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} y_{2k+1}(x).$$

Calculer ces dernières pour $n = 10$, $x = -\sqrt{3}$.

II

On considère l'équation algébrique

(1) $$y_8(x) = 0.$$

Montrer que sa résolution se ramène à celle de l'équation

$$t^3 - 3t + 1 = 0,$$

dont on déterminera des valeurs approchées des racines à 10^{-3} près, par la méthode de substitution.

Donner alors les valeurs des racines de l'équation (1). Comparer les résultats obtenus à ceux du paragraphe (I, 3).

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail